

– im gleichen Diagramm – die Abklingdauern der Gesamtfluoreszenz von festem Uranylнитrat für verschiedene Wellenlängen der anregenden Strahlung sind in Abb. 1 aufgetragen. Die Selektion des Anregungsstrahls aus der Xenonlampe geschah dabei mit einem Monochromator. In der Abb. 2 sind die relativen Fluoreszenzintensitäten und die Abklingdauern als Funktion der Emissionswellenlänge für 20 °C und – 180 °C wiedergegeben. Die Anregung erfolgte in diesem Falle mit dem gefilterten Licht (Schott BG-12 + GG-5) einer Quecksilberdampfampe.

Das wesentliche Resultat ist, daß die Abklingdauer des festen Uranylнитrats sowohl über den ganzen Emissionsbereich konstant als auch von der Anregungsenergie unabhängig ist. Der niedrigere Wert von τ bei Zimmertemperatur bei gleichzeitig verminderter Fluoreszenzintensität deutet auf strahlungslose Konkurrenzprozesse hin.

Aus der Unabhängigkeit der Struktur^{1,2} und der Abklingdauer der Fluoreszenzbande von der anregenden Wellenlänge ist zu schließen, daß die gesamte Fluoreszenzemission einem einzigen Zentrum zuzuordnen ist.

Die Beobachtung verschiedener τ -Werte in der Literatur³ möchten wir damit erklären, daß bei den in Arbeiten anderer Autoren meßtechnisch bedingten hohen Anregungsintensitäten ein nichtexponentielles Abklingen durch eine Löschung bei hohen Anregungskonzentrationen (Löschung III. Art) auftrat^{4,5}. Die hier benutzte Methode erlaubte demgegenüber die Anwendung geringer Anregungsintensitäten.

Sonderdruckanforderungen an Dr. R. POHOSKI, Katedra Fizyki, Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Gdańsk, Polen.

¹ E. L. NICHOLS u. H. L. HOWES, Fluorescence of the Uranyl Salts, Carnegie Inst. Wash. Pub. **1919**, 298.

² W. L. LEWSCHIN u. G. D. SCHEREMETOW, Zur. Exp. Teor. Phys. **17**, 209 [1947].

³ E. RABINOWITCH u. R. L. BELFORD, Spectroscopy and Photochemistry of Uranyl Compounds, The Macmillan Company, New York 1949.

⁴ N. A. TOLSTOI, A. P. ABRAMOV u. I. N. ABRAMOVA, Optika Spekt. **20**, 742 [1966].

⁵ N. A. TOLSTOI u. A. P. ABRAMOV, Optika Spekt. **21**, 171 [1966].

On the Equivalence between Cini-Fubini approximants and diagonal Padé approximants

C. G. GEORGALAS

Nuclear Research Center "Democritos", Aghia Paraskevi, Attikis, Athens, Greece

(Z. Naturforsch. **25 a**, 447–448 [1970]; received 23 December 1969)

The Cini-Fubini approximants are equal to the diagonal Padé approximants to the S -matrix. In this paper a simple proof of this statement is given.

1. Introduction

Recently, the Padé approximant technique has been successfully applied by several authors to the perturbative development of the S matrix (see e. g. Ref. 1–6).

On the other hand, some years ago, CINI and FUBINI (C. F.) starting from the Lippmann-Schwinger variational principle⁷, have derived a sequence of unitary approximate expressions $S^{(n)}$ for the S matrix⁸. It turns out that the C. F. approximants $S^{(n)}$ coincide with the diagonal Padé approximants $[n, n]$, i. e.:

$$S^{(n)} = [n, n] \quad (1)$$

for all $n = 1, 2, \dots$. To the best of the author's knowledge, the only published proof of this statement

is given by BESSIS and PUSTERLA in⁴. The above authors however have met with some difficulty in proving that the relative phases between the two sets of approximants are zero and hence, their proof is rather involved conceptually. In this paper we give an alternative, more straightforward proof.

2. Some relevant results

Consider the perturbative development of the S matrix:

$$S(g) = 1 + g S_1 + g^2 S_2 + \dots \quad (2)$$

The n -th C. F. approximant to $S(g)$ is calculated with the aid of the $(n+1)$ simultaneous equations:

$$S^{(n)} = \sum_{k=0}^n g^k S_k + \sum_{k=1}^n g^{k+i} S_{k+i} I_k^{(n)} \quad (3)$$

$$0 \leq i \leq n$$

where $I_k^{(n)}$ for $k = 1, 2, \dots, n$, are n auxiliary quantities

Our Eq. (3) coincide essentially with Eq. (12) of⁸ the only difference in our notation being that we write the coupling constant g explicitly whereas C. F. absorb it in to the elements S_k .

Reprints request to C. G. GEORGALAS, Nuclear Research Center "Democritos", Aghia Paraskevi, Attikis, Athens, Greece.

¹ S. TANI, Phys. Rev. **139 B**, 1011 [1965].

² G. BAKER and J. S. R. CHISHOLM, J. Math Phys. **7**, 1900 [1966].

³ J. L. GAMMEL and F. A. MACDONALD, Phys. Rev. **142**, 1145 [1966].

⁴ D. BESSIS and M. PUSTERLA, Nuovo Cim. **54 A**, 243 [1968].

⁵ I. A. MIGNACO, M. PUSTERLA, and E. REMIDDI, Nuovo Cim. to be published.

⁶ J. L. BASDEVANT, D. BESSIS, and J. ZINN-JUSTIN, Saclay preprint D. Ph./T/DOC/AN/68-24 [1968].

⁷ B. A. LIPPMANN and J. SCHWINGER, Phys. Rev. **79**, 469 [1950].

⁸ M. CINI and S. FUBINI, Nuovo Cim. **11**, 142 [1954].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Solving the linear system (3) one can determine the $(n+1)$ unknowns

$$S^{(n)}; \Gamma_1^{(n)}, \dots, \Gamma_n^{(n)}.$$

On the other hand the n th diagonal Padé approximant $[n, n]$ to the series (2) is the ratio of two polynomials in g of degree n :

$$[n, n] = \frac{1 + g a_1^{(n)} + \dots + g^n a_n^{(n)}}{1 + g b_1^{(n)} + \dots + g^n b_n^{(n)}}. \quad (4)$$

The coefficients $b_m^{(n)}$ and $a_m^{(n)}$ of these polynomials are determined by the requirement that the power series development of (4) coincide with (2) up to the $2n$ th term. It is then easy to see that

$$b_m^{(n)} = -\frac{D_m^{(n)}}{D_0^{(n)}} \quad (m=1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

where $D_0^{(n)}$ and $D_m^{(n)}$ are $n \times n$ determinants. $D_0^{(n)}$ is given by

$$D_0^{(n)} = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix}$$

and $D_m^{(n)}$ can be obtained from $D_0^{(n)}$ by substituting the $(n-m+1)$ th column by $S_{n+1}, S_{n+2}, \dots, S_{2n}$. The coefficients $a_r^{(n)}$ ($r=1, 2, \dots, n$) are given in terms of $b_m^{(n)}$ and S_k by the equations

$$a_r^{(n)} = \sum_{m=0}^r b_m^{(n)} S_{r-m}. \quad (6)$$

$$S^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} S_1 & \dots & S_n & 1 \\ S_2 & \dots & S_{n+1} & \frac{1}{g} + S_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{n+1} & S_{2n} & \frac{1}{g^n} + \frac{S_1}{g^{n-1}} + \dots + S_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_1 & \dots & S_n & 1 \\ S_2 & \dots & S_{n+1} & \frac{1}{g} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{n+1} & S_{2n} & \frac{1}{g^n} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} S_1 & \dots & S_n & g^n \\ S_2 & \dots & S_{n+1} & (1+g S_1) g^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{n+1} & S_{2n} & (1+g S_1 + \dots + g^n S_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_1 & \dots & S_n & g^n \\ S_2 & \dots & S_{n+1} & g^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{n+1} & S_{2n} & 1 \end{vmatrix}}$$

where, in the last step we have multiplied the last column of the numerator and the denominator by g^n .

$$S^{(n)} = \frac{(1+g S_1 + \dots + g^n S_n) D_0^{(n)} - \dots - (1+g S_1) g^{n-1} D_{n-1}^{(n)} - g^n D_n^{(n)}}{D_0^{(n)} - D_1^{(n)} g - \dots - D_n^{(n)} g^n}.$$

Dividing by $D_0^{(n)}$ using (5) and separating, in the numerator, the terms with equal powers of g , we find:

$$S^{(n)} = \frac{1 + (S_1 + b_1^{(n)}) g + \dots + (S_n + S_{n-1} b_1^{(n)} + \dots + b_n^{(n)}) g^n}{1 + b_1^{(n)} g + \dots + b_n^{(n)} g^n}.$$

This quantity, by (6) and (4), is equal to $[n, n]$. Hence (1) follows.

Acknowledgments

A large part of this work has been done when the author was at the Istituto di Fisica Galileo Galilei of the University

3. Proof of the equivalence

We are now ready to prove Eq. (1).

Solving the system (2) for $S^{(n)}$ one finds

$$S^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g S_1 & \dots & g^n S_n & 1 \\ g^2 S_2 & \dots & g^{n+1} S_{n+1} & 1+g S_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g^{n+1} S_{n+1} & \dots & g^{2n} S_{2n} & 1+g S_1 + \dots + g^n S_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g S_1 & \dots & g^n S_n & 1 \\ g^2 S_2 & \dots & g^{n+1} S_{n+1} & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g^{n+1} S_{n+1} & \dots & g^{2n} S_{2n} & 1 \end{vmatrix}}$$

where the numerator and the denominator are determinants with $(n+1)$ rows and columns.

If we now factorise out of the numerator a factor g from the first column, a factor g^2 from the second ... a factor g^n from the n th, we get an overall factor of $g^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ which cancels with an equal factor obtained in a similar way from the denominator. In the ratio thus obtained we factorise out of the numerator a factor g from the second row, a factor g^2 from the third row ... and a factor g^n from the $(n+1)$ th row. We thus obtain again a factor $g^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ which again cancels with an equal factor similarly obtained from the denominator. Finally, we are left with

If we now develop the numerator and the denominator according to the elements of the last column we find: